

## Логарифмирование через поднятие

Задачи вычисления логарифма в группе точек эллиптической кривой и в мультиплексивной группе конечного поля положены в основу безопасности многих криптосистем, например, стандартов цифровой подписи РФ и США. Для логарифмирования на эллиптической кривой, обладающей группой простого порядка  $r$ , наилучшим считается алгоритм Полларда со сложностью  $O(\sqrt{r})$ . Для логарифмирования в конечном поле  $\mathbf{F}_p$  наилучшим считается алгоритм решета числового поля со сложностью  $O\left(\exp\left(c^3\sqrt{\ln p(\ln \ln p)^2}\right)\right)$  для  $c < 2$ . Предлагается подход к вычислению логарифмов, основанный на использовании эллиптической кривой над числовым полем, обладающей достаточно большим рангом. Показано, что задача логарифмирования в конечном поле и на эллиптической кривой сводится к поднятию точки кривой в числовое поле.

### 1. Теоретические основы

Эллиптическая кривая

$$E(K): y^2 = x^3 + Ax + B, \quad (1)$$

заданная над числовым полем  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{D_1}, \sqrt{D_2}, \dots, \sqrt{D_m})$ , может быть приведена по модулю  $p$ , если  $\sqrt{D_i} \in \mathbf{F}_p$  (вместо различных  $D_i$ , конечно, можно использовать одно алгебраической число). Целостное кольцо целых элементов поля  $K$  обладает однозначным разложением на простые идеалы. Координаты каждой конечной точки кривой  $E(K)$  могут быть приведены к паре дробей с целыми рациональными знаменателями. Редукция кривой  $E(K)$  по модулю  $p$  определена и задает отображение

$$\phi: E(K) \rightarrow E(\mathbf{F}_p). \quad (2)$$

Обратно, кривая

$$E(\mathbf{F}_p): y^2 \equiv x^3 + Ax + B \pmod{p} \quad (3)$$

может быть вложена в кривую  $E(K)$ . Отображение точки  $Q \in E(\mathbf{F}_p)$  в точку  $Q \in E(K)$  назовем *поднятием* точки  $Q$  из поля  $\mathbf{F}_p$  в поле  $K$ , при этом сравнение (3) превращается равенство (1). Сумме точек  $E(K)$  соответствует сумма точек  $E(\mathbf{F}_p)$  (обратное утверждение неверно). Поэтому задача вычисления векторного индекса на кривой  $E(K)$  соответствует задаче вычисления индекса на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  относительно гомоморфных образов образующих кривой  $E(K)$ .

Кривая (3) допускает изоморфизмы  $x \rightarrow xu^2$ ,  $y \rightarrow yu^3$ ,  $A \rightarrow Au^4$ ,  $B \rightarrow Bu^6$ . Таким образом, вместо одиночной кривой (3) можно рассматри-

вать семейство изоморфных кривых, каждая из которых может быть вложена в соответствующую кривую  $E(K)$ .

Нас будет интересовать случай бесконечной группы  $E(K)$ . Отображение (2) определяется ядром. Пусть  $\#E(\mathbf{F}_p) = r$  — большое простое число. Если бесконечная группа  $E(K)$  циклична с образующей  $P_1$ , то

$$\text{Ker}(\phi) = nrP_1,$$

где  $n \in \mathbf{Z}$ , а точке  $P = kP_1$  на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  будет соответствовать множество точек  $kP_1 + nrP_1$  на кривой  $E(K)$ .

Предположим, что бесконечная группа  $E(K)$  без кручения имеет две образующих  $P_1$  и  $P_2$ , и на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  выполняется равенство  $\phi(P_2) = s\phi(P_1)$ . Ядро гомоморфизма включает в себя целочисленные линейные комбинации образующих, кратные  $r$ . Кроме того, в ядро входят комбинации образующих, гомоморфный образ которых дает бесконечно удаленную точку, например,  $sP_1 - P_2$ ,  $(2s \pmod{r})P_1 - 2P_2$  и т. п. Тогда

$$\text{Ker}(\phi) = n_1rP_1 + n_2rP_2 + (m \cdot s \pmod{r})P_1 - mP_2,$$

где  $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ ,  $m \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

Обобщим предыдущее рассуждение на случай  $k$  образующих  $P_1, \dots, P_k$ . Пусть на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  выполняются равенства  $\phi(P_k) = s_1\phi(P_1) = s_2\phi(P_2) = \dots = s_{k-1}\phi(P_{k-1})$ . Тогда

$$\text{Ker}(\phi) = \sum_{i=1}^k n_i r P_i + \sum_{i=1}^{k-1} (m_i s_i \pmod{r}) P_i - \left( \sum_{i=1}^{k-1} m_i \right) (\pmod{r}) P_k,$$

где  $n_i \in \mathbf{Z}$ ,  $m_i \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

*Каноническая высота* точки  $P \in E(\mathbf{Q})$  определяется [1] как предел

$$\hat{h}(P) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{h(mP)}{m^2}, \quad (4)$$

где  $h(R)$  — длина координаты  $x$  точки  $R$  в битах,  $\hat{h}(P) \in \mathbf{R}$ . В соответствии с (4) длина координат точек  $mR$  растет пропорционально квадрату от  $m$  или пропорционально экспоненте от квадрата длины  $m$ . Имеет место равенство  $\hat{h}(P) = \frac{h(P)}{2} + O(1)$ . Аналогично определяется и каноническая высота на эллиптической кривой  $E(K)$  над конечным расширением  $K$  поля  $\mathbf{Q}$ . При этом имеют место равенства

$$\begin{aligned} \hat{h}(P+Q) + \hat{h}(P-Q) &= 2\hat{h}(P) + 2\hat{h}(Q) \\ \hat{h}(mP) &= m^2 \hat{h}(P). \end{aligned} \quad (5)$$

Равенство (5) устанавливает связь задачи логарифмирования на эллиптической кривой и задачи логарифмирования в конечно порожденной подгруппе группы  $\mathbf{R}^*$  ненулевых вещественных чисел.

Каждая точка бесконечного порядка эллиптической кривой  $E(K)$  однозначно определяется канонической высотой. Если  $P$  — точка кручения, то  $\hat{h}(P) = 0$ . По теореме Морделла — Вейля ранг кривой  $E(K)$  конечен. Индекс  $\text{ind}(R)$  каждой точки  $R \in E(K)$  может быть представлен как вектор, число координат которого равно рангу кривой. Если  $P_1, \dots, P_k$  — образующие группы  $E(K)$  бесконечных порядков и  $R = \sum_{i=1}^k n_i P_i$ , где индексы точек  $P_i$

образуют базис  $k$ -мерного  $\mathbf{Z}$ -модуля. Поэтому индексы точек бесконечного порядка кривой  $E(K)$  образуют целочисленную решетку.

Например, эллиптическая кривая  $E$ :  $y^2 = x^3 + 17$  имеет над  $\mathbf{Q}$  ранг 2. Образующие группы бесконечного порядка равны  $P_1 = (2, 5)$  и  $P_2 = (-2, 3)$ , индекс точки бесконечного порядка является двумерным вектором. Точки

$$R_1 = \left( \frac{1466}{169}, -\frac{56857}{2197} \right) \text{ и } R_2 = \left( \frac{94}{25}, \frac{1047}{125} \right)$$

равны  $R_1 = 3P_1 - 2P_2$ ,  $R_2 = 2P_1 - 3P_2$ , их индексы равны  $\text{ind}(R_1) = (3, -2)$ ,  $\text{ind}(R_2) = (2, -3)$ . При переходе к расширению  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$  кольцо целых имеет вид  $\mathbf{Z}[\rho]$ ,  $\rho = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$ , кривая обладает комплексным умножением на число  $\rho$ , задаваемое парой функций  $(x, y) \rightarrow (\rho^2 x, -y)$ . Поскольку число  $\rho$  не является рациональным, то к паре образующих присоединяются (по крайней мере) еще две точки  $(-2\rho^2, 3)$  и  $(2\rho^2, 5)$ . Используя сравнения по модулям различных простых чисел  $p \equiv \pm 1 \pmod{6}$ , можно показать, что точки  $(2, 5)$ ,  $(-2, 3)$ ,  $(-2\rho^2, 3)$  и  $(2\rho^2, 5)$  кривой  $E(K)$  линейно независимы над  $\mathbf{Z}$ .

По определению канонической высоты выполняется равенство  $\hat{h}(P) = \hat{h}(-P)$ . Поэтому если  $P$  и  $Q$  — образующие группы бесконечного порядка, то

$$\hat{h}(P + Q) = \hat{h}(P - Q) = \hat{h}(P) + \hat{h}(Q).$$

Следовательно, канонические высоты точек бесконечного порядка эллиптической кривой  $E(K)$  образуют решетку, базис которой состоит из канонических высот образующих групп бесконечного порядка.

Пусть  $H = (h_{ij})$  — квадратная матрица размера  $k \times k$  ( $k$  — ранг кривой  $E(K)$ ), где

$$h_{ij} = \frac{\hat{h}(P_i + P_j) - \hat{h}(P_i) - \hat{h}(P_j)}{2}$$

и  $P_1, \dots, P_k$  — образующие циклических групп бесконечных порядков. Тогда имеет место равенство

$$\hat{h}(n_1 P_1 + n_2 P_2 + \dots + n_k P_k) = \mathbf{n} H \mathbf{n}^T, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$  — векторный индекс точки  $P = n_1 P_1 + \dots + n_k P_k$ . Выражение (6) устанавливает связь между канонической высотой произвольной точки кривой  $E(K)$ , и ее индексом.

## 2. Использование поля характеристики 0

Задача поднятия точки требует указания всех двоичных разрядов координат точки  $E(K)$ . В соответствии с (4) длина координат точки пропорциональна квадрату показателя (или экспоненте от квадрата длины показателя). Отсюда следует, что для  $k = 1$  задача поднятия является сложной хотя бы потому, что перечисление всех разрядов координат требует экспоненциального времени (даже без учета сложности собственно вычислений). Однако, если ранг  $k$  кривой  $E(K)$  достаточно велик, то на ней существует значительное количество точек с малой высотой. Ранг эллиптической кривой с комплексным умножением может быть вычислен как кратность нуля функции  $L_{E/K}(s)$ , где  $s = 1$  в предположении, что верна гипотеза Берча и Свиннертона-Дайера [1].

Определим *вес*  $w = w(P)$  точки  $P \in E(K)$  на точечной решетке как сумму абсолютных значений координат векторного индекса. Если  $\text{ind}(P) = (n_1, \dots, n_k)$ , то  $w(P) = |n_1| + \dots + |n_k|$ . Число точек  $N_w$  с весом ровно  $w$  в соответствии с известным результатом из комбинаторики равно

$$N_w = \frac{k(k+1)\dots(k+w-1)}{w!} = \binom{k+w-1}{w}. \quad (7)$$

Если  $k = O(w)$ , то число точек с весом не более  $w$  можно оценить числом точек с весом  $w$ .

Оценим сложность нахождения индекса точки  $P \in E(K)$ ,  
 $P = \sum_{i=1}^k n_i P_i$ , если ранг кривой  $E(K)$  равен  $k$  и вес точки  $P$  не превышает  $w$ .

Из (6) следует, что  $\hat{h}(P) = O(kw^2)$ . Для нахождения индекса точки  $P \in E(K)$  нужно к точке  $P$  прибавлять точки  $\pm P_i$  до тех пор, пока не будет получена нулевая каноническая высота. После каждого сложения высота должна уменьшаться. Число сложений точек в ходе вычисления индекса точки  $P$  равно  $O(kw)$ . Наиболее трудоемкой арифметической операцией при сложении точек является умножение. Сложность умножения целых чисел методом Шенхаге — Штассена равна  $O(kw^2 \log(kw^2))$ . Пусть поле  $K$  является конечным расширением поля  $\mathbf{Q}$ , полученное присоединением квадратных

корней из небольших по абсолютной величине чисел  $D_1, \dots, D_m$ , причем все  $D_i$  являются квадратичными вычетами по модулю  $p$ . Координаты точки представляют собой многочлены от  $2^m$  переменных. Сложность умножения координат равна  $O(2^m k w^2 \log(kw^2))$ . Такую же оценку имеет и сложность сложения точек. Поэтому сложность нахождения индекса точки  $P \in E(K)$  равна

$$S = O(2^m k^2 w^3 \log(kw^2)).$$

Пусть поле  $K$  является конечным расширением поля  $\mathbf{Q}$ , полученное присоединением квадратных корней из небольших по абсолютной величине чисел  $D_1, \dots, D_m$ , причем все  $D_i$  являются квадратичными вычетами по модулю  $p$ . Предположим по аналогии с теоремой Мазура [1] для  $E(\mathbf{Q})$ , что группа кручения эллиптической кривой  $E(K)$  может иметь только гарантированно малый порядок, меньший чем  $r$ . Тогда в силу гомоморфизма (2) группа кручения  $\text{Tors}E(K)$  состоит из бесконечно удаленной точки, то есть все аффинные точки  $E(K)$  имеют бесконечный порядок<sup>1</sup>. Поэтому желательно использовать поле  $K$ , задаваемое многочленом небольшой степени.

Общий план решения показательного уравнения  $P = lQ$  на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  может иметь следующий вид.

1. Поднять не менее  $k$  аффинных точек  $R_i = a_i P + b_i Q$  для некоторых  $a_i, b_i$ , из поля  $\mathbf{F}_p$  в поле  $K$ , определив при этом вид поля  $K$ . Не все  $a_i$  и не все  $b_i$  должны быть нулевыми. Найти образующие  $P_1, \dots, P_k$  бесконечных циклических групп  $E(K)$ .
2. Найти индексы точек  $R_i$  в группе  $E(K)$  минимизацией канонической высоты.
3. Привести каждую из точек  $R_i$  и образующие  $E(K)$  по модулю  $p$ .
4. Методом гауссова исключения выразить логарифм точки  $P$  через логарифм точки  $Q$ .

Поднятие на шаге 1 должно обеспечивать минимальный вес точки. Если мощность множества точек веса не более  $w$  близка к  $r$ , то с вероятностью, близкой к 1, каждую точку кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  можно поднять так, что ее вес не будет превышать  $w$ .

Найдем вначале сложность шагов 2–4. Заменим в (7) факториалы по формуле Стирлинга и приравняем  $\log N_w$  и  $\log r$  в предположении, что  $k \approx w$ . Получим

$$\log r = \log N_w = (k + w) \log(k + w) - k \log k - w \log w \approx 2k \log 2.$$

---

<sup>1</sup> Теоретически можно было бы в качестве поля  $K$  использовать простое трансцендентное расширение  $\mathbf{F}_p(t)$  поля  $\mathbf{F}_p$ , что облегчило бы поднятие точки. Однако в этом случае группа кручения оказалась бы очень богатой, так как она содержала бы все конечные группы  $E(\mathbf{F}_q)$  для  $q \in \{p^2, p^3, \dots\}$ . Поэтому указанный ниже метод логарифмирования оказывается непрактичным.

Тогда

$$k = \frac{\log_2 r}{2}.$$

Для нахождения логарифма  $l$  нужно найти  $O(k)$  индексов точек  $R_i$ , сложность этой операции (шаг 2) равна

$$O(2^m k^3 w^3 \log(kw^2)) = O(2^m (\log r)^6 \log \log r).$$

Сложность шага 3 оценивается многочленом степени не более 6 от  $\log r$ , сложность шага 4 оценивается многочленом степени 3 от  $\log r$ . Итоговая сложность вычисления логарифма на кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  равна

$$S = O(2^m (\log r)^6 \log \log r) + O(\log r) \cdot (S_1 + S_2)$$

где  $S_1$  — сложность поднятия точки из поля  $\mathbf{F}_p$  в поле  $K$  так, чтобы вес поднятой точки был минимален,  $S_2$  — сложность нахождения образующих  $P_i$ . Если наибольшая из сложностей  $S_1$  и  $S_2$  полиномиальна (субэкспоненциальна, экспоненциальна), то и задача логарифмирования может быть решена указанным методом с полиномиальной (соответственно субэкспоненциальной, экспоненциальной) сложностью. Существование эллиптических кривых над  $\mathbf{Q}$  неограниченно большого ранга, вытекает из гипотезы Таниямы [1].

Таким образом, задача дискретного логарифмирования на эллиптической кривой  $E(\mathbf{F}_p)$  полиномиально сводится к поднятию точки кривой из поля  $\mathbf{F}_p$  в числовое поле  $K$  и к нахождению множества образующих кривой  $E(K)$ . Поднятие выполняется наиболее просто, если вес поднятой точки будет минимален.

Метод поднятия точки из  $\mathbf{F}_p$  в  $K$  неочевиден. Если определить *вес*  $w$  точки на решетке ранга  $k$  образующих бесконечного порядка кривой  $E(\mathbf{Q})$  как наибольшее из абсолютных значений координат, то количество точек с весом не более  $w$ , равно числу точек  $k$ -мерного параллелепипеда с центром в нуле и длиной стороны  $2w$  и составляет  $k^{2w}$ . В этом случае можно оставаться в рамках поля  $\mathbf{Q}$ . Если задача поднятия точки в поле  $\mathbf{Q}$  имеет полиномиальную или субэкспоненциальную сложность, то снижение асимптотической сложности задачи логарифмирования по сравнению с алгоритмом Полларда происходит при ранге не менее 3. Таких кривых достаточно много [2].

Аналогичный подход может быть использован и для логарифмирования в мультиликативной группе простого поля. Для решения показательного уравнения  $a^u \equiv b \pmod{p}$  выполняется следующая последовательность действий.

1. Выбирается эллиптическая кривая  $E(K)$  вида  $y^2 = x^3 + Cx^2 + kp$ ,  $Ck \neq 0$ , которая в результате редукции по модулю  $p$  дает особую кубику.

2. С помощью вычислимого в обе стороны изоморфизма особой кубики и группы  $\mathbf{F}_p^*$  находятся точки кубики, соответствующие элементам  $a$  и  $b$ .
3. Находится ранг кривой  $E(K)$  и ее образующие.
4. Далее задача решается так же, как и для эллиптической кривой.

Ранг эллиптической кривой  $E(\mathbf{Q})$  мал и обычно не превышает 14 [2]. Для логарифмирования указанным способом нужно иметь больший ранг. Например, если длина порядка группы  $r$  равна 200 бит, то оптимальное значение ранга и веса составляют около 100. Для этого можно использовать последовательные квадратичные расширения поля  $\mathbf{Q}$ , полученные присоединениями квадратных корней и малых  $D_i$ , являющихся квадратичными вычетами по модулю  $p$ , или использовать кривую  $E(\mathbf{Q})$  достаточно большого ранга. Если кривая обладает комплексным умножением, то присоединение к полю  $\mathbf{Q}$  квадратичного целого, определяющего комплексное умножение, приводит по крайней мере к удвоению ранга.

Таким образом, задача логарифмирования на эллиптической кривой над простым полем и в мультиплекативной группе простого поля может быть сведена к выбору эллиптической кривой большого ранга над числовым полем и к поднятию точки кривой из конечного поля в числовое поле. Анализ техники решения диофантовых уравнений [3], в частности, уравнений Пелля, подтверждает перспективность указанного подхода для решения задач логарифмирования.

## Литература

1. Silverman J. H. The arithmetic of elliptic curves. — GTM, v. 106, Springer-Verlag, 1986.
2. Степанов С. А. Арифметика алгебраических кривых. — М.: Наука, 1991.
3. Zagier D. Large integral points on elliptic curves // Math. Comp., v. 48, 1987, pp. 425–436.